



Universidade de Brasília

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Departamento de Economia

Ricardo Augusto Bonfim Maciel da Rosa

**Estrutura a termo das taxas de juros: panorama da classe de
modelos Nelson-Siegel**

Brasília – DF

2013

Ricardo Augusto Bonfim Maciel da Rosa

**Estrutura a termo das taxas de juros: panorama da classe de
modelos Nelson-Siegel**

Monografia apresentada ao Departamento de
Economia como requisito parcial à obtenção
do título de Bacharel em Ciência
Econômicas.

Professor Orientador: Prof. José Guilherme
de Lara Resende, PhD.

Brasília – DF

2013

**Estrutura a termo das taxas de juros: panorama da classe de
modelos Nelson-Siegel.**

A Comissão Examinadora, abaixo identificada, aprova o Trabalho de
Conclusão do Curso de Economia da Universidade de Brasília do aluno

Ricardo Augusto Bonfim Maciel da Rosa

Prof. José Guilherme de Lara Resende, PhD

Doutor Benjamin Miranda Tabak

Brasília, 31 de julho de 2013

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. José Guilherme, por ter suscitado meu interesse pelo tema e ter se mostrado sempre disposto a ajudar.

Aos colegas de Econsult e FUNCEF, pelo dia-a-dia profissional enriquecedor e amizades significativas.

À minha família e amigos, base de tudo.

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de abordar o tema da Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ) e sua modelagem. São discutidas a motivação de sua estimação, as teorias a ela ligadas e os três grandes campos teóricos que estudam sua modelagem, nomeadamente as abordagens de equilíbrio, de não arbitragem e de modelagem paramétrica, ou Nelson-Siegel. A estimação dos modelos Nelson-Siegel e Diebold-Li é realizada para dados do Tesouro norte-americano.

Palavras-chave: estrutura a termo das taxas de juros; ETTJ; curva de juros; Nelson-Siegel; Diebold-Li.

Abstract

This paper aims to explore the subject of the term structure of interest rates and its modeling. Here are discussed the motivation behind its estimation, the theories which try to explain it and its three modeling approaches, namely the equilibrium approach, the no-arbitrage approach and the parametric, or Nelson-Siegel, approach. The estimation of the Nelson-Siegel and Diebold-Li methods is executed using U.S. Treasury data.

Keywords: term structure of interest rates, spot curve, Nelson-Siegel, Diebold-Li.

1. Introdução

Este trabalho tem o objetivo de abordar o tema da Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ) e sua modelagem. Serão discutidas a motivação de sua estimação, as teorias a ela ligadas e os três grandes campos teóricos que estudam sua modelagem, nomeadamente as abordagens de equilíbrio, de não arbitragem e de modelagem paramétrica, ou Nelson-Siegel.

Neste contexto, será dada ênfase à família de modelos Nelson-Siegel, uma proposta de modelagem paramétrica parcimoniosa originalmente publicada por Nelson e Siegel (1987).

Como um exercício, o modelo Nelson-Siegel e a extensão dinâmica de Diebold e Li (2006) serão estimados para títulos do Tesouro americano com vencimentos de 1 mês, 2 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, 3 anos, 5 anos, 7 anos, 10 anos e 20 anos.

O texto está organizado como segue, além desta introdução: na próxima seção discute-se a definição e usos da ETTJ. A terceira seção discorre sobre as teorias da ETTJ. Em seguida, na quarta seção, a família de modelos Nelson-Siegel é explorada em detalhes, especialmente a modelagem original proposta por Nelson e Siegel (1987), a extensão de Svensson (1994), a dinamização formulada por Diebold e Li (2006) e a variação dessa última realizada por Leite et al. (2009). São apresentadas, ainda as outras duas abordagens de modelagem. A quinta seção contém a estimação dos modelos. A sexta seção, por fim, conclui.

2. Definição e usos da Estrutura a Termo das Taxas de Juros

Fabozzi (2007) aponta que qualquer conjunto de títulos de dívida de mesma qualidade creditícia (usualmente verificada por meio de um *rating*) pode ser documentado com referência às taxas de retorno esperadas e seus correspondentes prazos de vencimento. A essa forma de descrição convencionou-se chamar Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ), Curva de Rendimentos ou Curva de Juros.

A curva de rendimentos não é única. Para uma mesma data, é possível construir diferentes curvas, que vão refletir as características de pagamentos de cupons e taxas à vista contratadas ou esperadas de cada título.

A abordagem de estudo e estimação da estrutura a termo das taxas de juros remete a contribuições iniciais de Hicks (1946), Culbertson (1957) e Malkiel (1962), que trataram de seus princípios e implicações. Esses trabalhos concentraram-se largamente na discussão inicial das teorias a serem abordadas na próxima seção.

Cox et al (1985), em um trabalho seminal na construção de uma das abordagens mais populares de modelagem e estimação da ETTJ, comumente tratado como CIR, definem que a curva de juros mede a relação entre as taxas de rendimentos de títulos livres de *default*¹ e seus prazos de vencimento.

A condição de ausência de possibilidade de *default*, apesar de não ser absolutamente necessária em toda e qualquer abordagem da ETTJ, é importante para fins de eliminação da necessidade de associar-se, à relação que se procura estabelecer por meio da curva de juros, um elemento de compensação pelo risco de *default* dos títulos utilizados.

As abordagens discutidas neste trabalho serão descritas assumindo o uso de títulos que atendam a tal condição. No estudo da ETTJ de títulos corporativos ou na comparação de títulos de países com diferentes qualidades creditícias, por exemplo, seria necessário incorporar um elemento de compensação pelo risco de *default*.

Além de Cox et al (1985), outros autores exploraram a modelagem da ETTJ, procurando alternativas que fornecessem alto poder explicativo e preditivo e, motivados pelo papel das taxas de juros na economia, que caracterizassem a relação entre a ETTJ e o resto da economia. Alguns destes são Vasicek (1977), Fama e Bliss (1987), Nelson e Siegel (1987), Chen (1989), Estrella e Hardouvelis (1991), Estrella e Mishkin (1998), Ang e Piazzesi (2003), Diebold e

¹ Possibilidade de *default* é a possibilidade de a parte devedora não cumprir suas obrigações contratuais e, dessa forma, não realizar os pagamentos relacionados ao fluxo prometido pelo título.

Li (2006), Diebold et al (2006), Bianchi et al (2009), Berardi (2009), Leite et al (2009) e Huse (2011).

É importante ressaltar que, no estudo acadêmico da ETTJ e de suas inter-relações com as variáveis econômicas que a determinam, é praxe fazer uso de títulos públicos sem cupons (*zero coupon bonds*, ou *zeroes*), ou decompor títulos com cupons para transformá-los em *zeroes*.

De acordo com Svensson (1994), essa necessidade surge em função de que diferentes taxas de cupom entre ativos com mesmo vencimento podem apresentar diferentes taxas de rendimentos até o vencimento. Por essa razão, uma curva de juros construída com tais taxas não refletirá apropriadamente a estrutura a termo das taxas de juros.

As taxas à vista implícitas, uma vez que sejam negociadas em mercado aberto, refletirão percepções dos negociantes sobre o estado da economia do país, possibilitando o teste de hipóteses sobre a influência de variáveis macroeconômicas sobre a ETTJ.

Cabe notar, ainda, que a contribuição acadêmica em termos do estudo da modelagem e estimação da ETTJ é de grande importância para outras atividades, como a precificação de ativos financeiros de renda fixa e derivativos, a avaliação de políticas econômicas por bancos centrais ou instituições independentes e a construção de expectativas sobre condições futuras de mercado e a economia real (TABAK et al, 2012).

É com o pano de fundo exposto nessa seção que surge o interesse sobre a modelagem e interpretação da estrutura a termo das taxas de juros de títulos públicos e sua relação com a atividade econômica.

3. Teorias da Estrutura a Termo das Taxas de Juros

A construção da curva de rendimentos para títulos que não pagam cupons ou para títulos que pagam cupons, mas que são decompostos em *zeroes*, pode ser realizada por três caminhos. Isso é fruto da relação que se observa entre a

curva de desconto, a curva à vista e a curva *forward*², como mostram Diebold e Rudebusch (2012).

Sendo $P(\tau)$ o preço de um título de vencimento no período τ , ou a curva de desconto desse título, $f(\tau)$ a taxa, ou curva, *forward* do mesmo título, e $y(\tau)$ a sua taxa, ou curva, à vista, temos, em tempo contínuo, seguindo McCulloch (1971,1975):

$$(1). \quad P(\tau) = e^{-\tau y(\tau)}$$

$$(2). \quad f(\tau) = \frac{-P'(\tau)}{P(\tau)}$$

$$(3). \quad y(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(u) du$$

As equações (1), (2) e (3) mostram que o uso dessas curvas com o intuito de descrever a ETTJ é intercambiável. Os métodos para estimar tais curvas serão abordados nas próximas seções. É importante notar que, ao conhecermos uma delas, conhecemos as outras duas, o que possibilita a formulação de teorias relacionadas ao comportamento esperado de taxas de juros à vista.

Uma vez que a ETTJ relaciona as taxas (à vista) ao tempo até o vencimento, surgem na literatura diferentes teorias para tratar a estrutura temporal de tais taxas. Essas teorias são de especial importância no que concerne à interpretação das relações entre a curva de juros e elementos macroeconômicos, principalmente as preferências individuais dos agentes econômicos.

A Teoria das Expectativas (TE) advoga que a diferença entre uma taxa de longo prazo e uma sucessão de taxas de curto prazo por igual período deve ser atribuída às expectativas dos agentes a respeito das taxas futuras (FABOZZI, 2007). Isso significa, de acordo com Tabak e Andrade (2003), que a taxa de longo prazo seria uma média das taxas de curto prazo esperadas mais um

² Svensson (1994) define taxas *forward* como a taxa de juros em investimentos ou empréstimos que começam em uma data futura, a data de estabelecimento, e duram até um futuro mais distante, a data de vencimento

prêmio de risco independente relacionado ao tempo até o vencimento (prêmio de vencimento, aproximação do termo original *term premium*), o que implicaria a neutralidade em relação ao risco de títulos de diferentes vencimentos por parte dos agentes econômicos.

Fama e Bliss (1987) analisam o conteúdo informacional de taxas *forward* de longo vencimento (1 a 5 anos) com dados de *Treasuries* americanos³ entre 1964-85. Seus resultados mostram que os prêmios de vencimento estimados têm grande variabilidade, assumindo tanto valores positivos, relacionados a momentos positivos no ciclo de negócios, quanto valores negativos, relacionados a recessões. Outros trabalhos mais recentes, como Dai e Singleton (2002) e Cochrane e Piazzesi (2005) reforçam essa evidência.

Tabak e Andrade (2003) também testaram a Teoria das Expectativas, com dados brasileiros e em conjunto com a Hipótese das Expectativas Racionais⁴, e constataram que o prêmio de vencimento para o Brasil foi variável no período analisado.

Bianchi et al. (2009), por outro lado, reportam, para dados do Reino Unido entre 1975 e 2005, que suas estimativas do prêmio de vencimento num modelo FAVAR (*Factor Augmented VAR*) tiveram raros desvios do que se esperaria da Teoria das Expectativas e que tais desvios coincidiam com períodos de construção de credibilidade por parte da autoridade monetária britânica. Os autores sugerem, ainda, que as evidências de variabilidade do prêmio de vencimento encontradas por outros autores se devem ao uso de modelos com coeficientes fixos que podem refletir a instabilidade de parâmetros omitidos.

Apesar da falta de consenso na caracterização do comportamento do prêmio de vencimento, Jardet et al. (2012) apontam a importância de seu estudo e estimação. Bancos centrais e participantes do mercado financeiro, especialmente, têm a necessidade de avaliar as causas de variações das taxas

³ As taxas utilizadas por Fama e Bliss (1987) são mensais entre janeiro de 1964 e dezembro de 1985, e derivadas de dados do *U.S. Government Bond File* do *Center for Research in Security Prices (CRSP)* da Universidade de Chicago, de acordo com a especificação elaborada pelos autores.

⁴ A Hipótese das Expectativas Racionais diz que os agentes econômicos formam suas expectativas utilizando todo o conjunto de informações disponível no período corrente e não incorrem em erros sistemáticos na formação de suas expectativas. Uma importante consequência da utilização de expectativas racionais na literatura está na Crítica de Lucas (LUCAS, 1976).

de juros de longo prazo e tentar decompô-las entre efeitos de mudanças na trajetória esperada das taxas de juros e mudanças na percepção de risco.

A Teoria do Prêmio por Liquidez, proposta por Hicks (1946), advoga que a maioria dos investidores prefere títulos com maturidades mais curtas, de forma que a aversão ao risco faz com que as taxas *forward* sejam sistematicamente maiores que as taxas à vista esperadas, ou seja, os títulos com maturidades mais alongadas devem pagar um prêmio em função da falta de liquidez a que sujeitam seus detentores.

Cox et al (1985) notam que a Teoria do Prêmio por Liquidez implica que a ETTJ terá formato ascendente, independente das expectativas que se desenhem sobre a evolução das taxas de juros na economia. A classe de modelos Nelson-Siegel, em especificações como Diebold e Li (2006) e Huse (2011), apresenta evidências contra essa teoria.

Os resultados empíricos, notadamente em Diebold e Li (2006) e Diebold et al. (2006), mostram que a flexibilidade na descrição das formas da ETTJ, imposta pela estrutura de fatores dessa família de modelos, permite obter boas estimativas em termos de precisão para previsão fora da amostra. A variedade de formas assumida pela curva de juros, especialmente em momentos precedentes a recessões, quando a curva tende a inverter-se, como aponta Huse (2011), mostra que a ETTJ não tem sempre formato ascendente.

Outra proposição teórica é a Teoria dos Mercados Segmentados, de Culbertson (1957), que supõe que cada agente envolvido na compra de um título possui alguma preferência específica sobre a maturidade do ativo. Em razão dessas preferências, os preços e, portanto, as taxas dos títulos seriam determinadas pela interação das forças de oferta e demanda por títulos daquele prazo de vencimento.

Cox et al. (1985) argumentam que, uma vez que haja uma parcela de investidores capazes de arbitrar entre prazos de vencimento, a precificação dos ativos não dependerá mais unicamente da demanda por cada classe de maturidades.

Há, entretanto, literatura recente, como Almeida et al. (2012), que modelam uma estrutura a termo segmentada com base em evidência empírica da influência da oferta e demanda de títulos sobre os *spreads* de taxas para títulos americanos. O modelo desenvolvido em Almeida et al. (2012) apresentou resultado superior aos modelos Diebold-Li e de passeio aleatório na previsão fora de amostra.

4. A modelagem da Estrutura a Termo das Taxas de Juros

A ETTJ é uma construção prática descritiva, utilizada na academia e no mercado financeiro para observação do comportamento das taxas à vista nos mercados de renda fixa. Ela é utilizada para precificação de títulos e derivativos por parte de vendedores, compradores e reguladores. Por essa razão, há algumas características que modelos que se propõem a estimar a ETTJ para determinadas maturidades devem ser capazes de descrever.

Essas características são facilmente expostas em termos das formas que a ETTJ estimada pelos modelos deve ser capaz de assumir: ascendente a taxas crescentes ou decrescentes, descendente a taxas crescentes ou decrescentes, invertida para cima ou para baixo e combinações desses comportamentos (DIEBOLD ET AL., 2006). Cada modelo acaba, portanto, tendo que desenvolver restrições e condições que possibilitem que suas estimativas atendam a essas características.

Há, ainda, alguns fatos ilustrativos do comportamento médio esperado da curva de juros, que os modelos também devem ser capazes de reproduzir, como apontam Diebold e Rudebusch (2012). Em primeiro lugar, a ETTJ média é ascendente, significando que um prêmio de vencimento parece existir, por algum motivo. Em segundo lugar, a volatilidade da curva tende a diminuir à medida que o vencimento dos títulos se alonga. Por fim, taxas são altamente persistentes no tempo, observando-se grande nível de autocorrelação para até 12 meses. Os *spreads* entre as taxas, no entanto, apresentam comportamento diferente, com menores volatilidade e persistência no tempo.

4.1. Abordagem Nelson-Siegel

Nelson e Siegel (1987) procuraram responder a uma demanda acadêmica vocalizada por Friedman (1977) por um modelo da curva de juros mais simples que fosse flexível o suficiente para explicar dados passados e realizar estimativas fora de amostras.

Nesse sentido, Nelson e Siegel, encontraram nas soluções de equações diferenciais, ou em diferenças, uma classe de funções que facilmente geram os formatos assumidos pela curva de juros.

Como aponta Svensson (1994), o uso de taxas *forward* para a precificação de ativos financeiros e para a descoberta de oportunidades de arbitragem é prática padrão na análise financeira.

Com essa motivação, os autores modelaram a taxa *forward* como uma solução para uma equação diferencial de segundo grau, chegando à forma, de acordo com a notação definida na seção 3, onde λ é uma constante que determina a taxa de decaimento exponencial dos carregamentos dos fatores:

$$(4). \quad f(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \cdot e^{-\lambda\tau} + \beta_3 (\lambda\tau \cdot e^{-\lambda\tau})$$

Logo, a taxa *forward* pode ser vista como uma constante mais uma função de Laguerre, uma popular função matemática de aproximação, como apontam Nelson e Siegel (1987).

Da taxa *forward* exposta acima, Nelson e Siegel utilizam o método de relação entre as curvas *forward* e à vista proposto por McCulloch (1971, 1975) definido anteriormente para construir a curva de rendimentos à vista:

$$(5). \quad y(\tau) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \frac{(1 - e^{-\lambda\tau})}{\lambda\tau} - \beta_3 \cdot e^{-\lambda\tau}$$

Nota-se, por essa forma final, que as formas assumidas pela ETTJ dependerão exclusivamente do prazo de vencimento dos títulos, uma vez que os τ são os mesmos que para a curva *forward* e o parâmetro λ é uma constante.

Para os dados utilizados por Nelson e Siegel, o modelo foi capaz de explicar uma larga fração deles, apresentando $R^2=0,959$ e desvio padrão de 0,000725 p.p. para as taxas à vista. Por esse resultado relevante, além da parcimônia na sua parametrização, simplicidade computacional e atenção às formas da ETTJ, a forma funcional proposta pelos autores tornou-se referência para aplicação na prática do mercado financeiro e para extensões formuladas ao longo do tempo.

Na equação proposta, os coeficientes β_1 , β_2 , e β_3 possuem a seguinte interpretação: β_1 representa a contribuição do elemento de longo prazo da curva, uma vez que ele é constante e não decai a zero, já que seu carregamento é igual a 1; β_2 , por sua vez, é a contribuição de curto prazo, já que seu carregamento apresenta o ritmo de decaimento mais elevado entre os três, começando em 1 e decaindo a 0 rapidamente; β_3 , por ter carregamento que começa em zero, atinge seu valor máximo, e volta a zero quando $\tau \rightarrow \infty$, é a contribuição de médio prazo.

4.2. A extensão de Svensson (1994)

Svensson (1994) propõe uma extensão da forma funcional de Nelson e Siegel para a estimação de taxas *forward*. Ele o faz por meio da adição de um quarto fator, um segundo termo de médio prazo que se relaciona a um fator de curvatura, e de um segundo parâmetro λ , que controla o comportamento do carregamento do quarto fator.

$$(6). \quad f(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \cdot e^{-\lambda_1 \tau} + \beta_3 (\lambda_1 \tau \cdot e^{-\lambda_1 \tau}) + \beta_4 (\lambda_2 \tau \cdot e^{-\lambda_2 \tau})$$

A equação (6) é apenas a equação *forward* (4) original de Nelson e Siegel (1987) acrescida de mais um fator de médio prazo e duas constantes de decaimento, λ_1 e λ_2 .

Assim como Nelson e Siegel, Svensson utiliza as relações descritas pelas equações (1), (2) e (3) para encontrar a curva à vista.

$$(7). \quad y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 \tau} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 \tau} - e^{-\lambda_1 \tau} \right) + \beta_4 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2 \tau}}{\lambda_2 \tau} - e^{-\lambda_2 \tau} \right)$$

Svensson avalia o modelo por estimação de máxima-verossimilhança e obtém resultados superiores à especificação original de Nelson e Siegel (1987), para um exercício fora da amostra para dados suecos (em 29 de dezembro de 1993) em termos de erros de preços e erros de taxas.

A especificação proposta por Svensson foi bem aceita em razão de sua simplicidade de implementação e qualidade de resultados e foi, com isso, incorporada como metodologia de estimação da ETTJ por instituições como o Banco Central canadense, o Federal Reserve Board e a Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais (ANBIMA).

4.3. A abordagem alternativa de Diebold e Li (2006)

A contribuição de Diebold e Li (2006) à proposta original de Nelson e Siegel (1987) foi abordar os três fatores originalmente interpretados como relacionados ao longo, curto e médio prazo como fatores de nível, inclinação e curvatura da curva de juros, respectivamente.

Diebold e Li (2006) utilizam a estrutura de componentes exponenciais de Nelson e Siegel (1987) para construir a ETTJ período a período, utilizando parâmetros em três dimensões que evoluem de forma dinâmica e interpretando tais parâmetros como fatores. Em razão dessa proposta, o modelo ficou conhecido na literatura como *Dynamic Nelson-Siegel (DNS)*.

A literatura apresenta algumas considerações importantes sobre a proposta de modelagem por fatores. Em primeiro lugar, Diebold e Rudebusch (2012) lembram que a estrutura de fatores tende a ser observada em situações em

que o comportamento de um objeto de grandes dimensões – nesse caso um conjunto de títulos com diferentes vencimentos – é definido pelo comportamento de um objeto de menores dimensões – um conjunto de variáveis macroeconômicas, como nível de preços, expectativas de inflação e crescimento e política fiscal. Dada a hipótese de que as taxas e preços dos títulos são definidos pelo comportamento de algumas variáveis macroeconômicas (observáveis ou não, dependendo do modelo, como veremos mais adiante), a estrutura de fatores parece conseguir descrever com precisão essa dinâmica.

Essa característica da estrutura de fatores a torna popular para o uso em outras situações de modelagem financeira. A *duration* de Macaulay (1938), uma popular medida da sensibilidade de títulos de renda fixa a variações da taxa de juros, o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), modelo de precificação de ativos de uso generalizado e o CAPM de três fatores de Fama e French (1992), são exemplos da utilização de estrutura de fatores para a descrição do comportamento de ativos financeiros.

Em segundo lugar, há evidências na literatura, como Litterman e Scheinkman (1991) e Bliss (1997), de que o comportamento da curva de juros é explicado por mais de um fator. Por meio da análise de componentes principais⁵, Joslin et al. (2010) apontam que os primeiros três componentes principais explicam mais de 95% da variação das taxas de títulos. Diebold e Rudebusch (2012), com o mesmo procedimento, reportam que os três primeiros componentes explicam quase 100% da variação em taxas num período amostral que vai de janeiro de 1985 a dezembro de 2008.

Diebold, Piazzesi e Rudebusch (2005) discutem os métodos para a construção dos fatores e de seus carregamentos. É possível impor estrutura apenas aos fatores, utilizando os primeiros componentes principais para essa função e deixando seus carregamentos irrestritos.

⁵ A análise de componentes principais (*principal component analysis – PCA*) é uma transformação ortogonal que converte um conjunto de observações correlacionadas em um conjunto de valores, os componentes principais, linearmente não correlacionados. O procedimento permite, dessa forma, isolar a contribuição de cada componente para a variação total observada no conjunto original de observações.

Há a possibilidade, identificada no método Nelson-Siegel, de retirar quaisquer restrições aos fatores, permitindo que eles sejam latentes (ou não observáveis), e impor restrições a seus carregamentos com o objetivo de mimetizar propriedades econômicas desejáveis – na família Nelson-Siegel, essas restrições servem ao fim de garantir a variedade de formas assumidas pela ETTJ, taxas *forward* positivas e fator de desconto decrescente e limitado a zero à medida que o vencimento dos títulos se alonga.

Por fim, há a opção identificada com a linha de modelagem de não arbitragem, em que são impostas uma estrutura linear ou afim para os fatores não observáveis e uma estrutura que garante a inexistência de possibilidades de arbitragem aos carregamentos dos fatores.

As mudanças citadas em Diebold e Li (2006) alteram a contribuição original de Nelson e Siegel (1987), de modo que o novo modelo passa a ter, além de sua dimensão de *cross-section*, uma dimensão de série temporal. As taxas utilizadas no modelo foram construídas e padronizadas para 17 vencimentos por meio da metodologia de construção de rendimentos proposta por Fama e Bliss (1987).

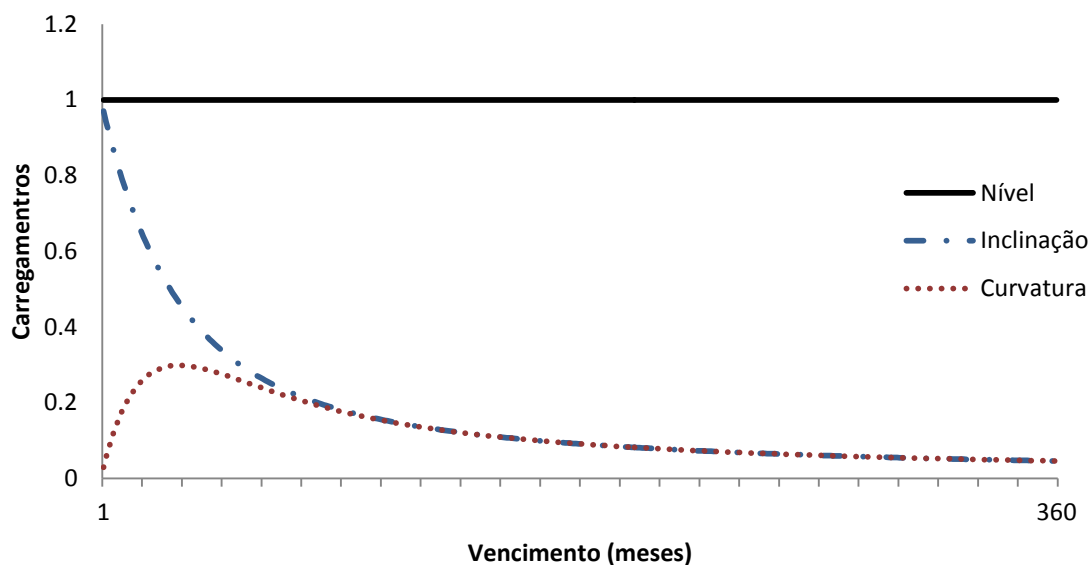
Esse método constrói taxas *forward*, conhecidas como “*unsmoothed Fama-Bliss forward rates*”, cada vez mais longas para precificar títulos de maturidades sucessivamente mais longas. Dado que haja, para um período t , taxas *forward* t calculadas até o vencimento T e que o título de interesse tenha vencimento $T+k$, o procedimento é executado da seguinte forma. Utilizam-se as taxas *forward* disponíveis para todo o período entre t e T . Os fluxos de recebimento a serem recebidos após T são descontados pelas taxas *forward* disponíveis até T e, posteriormente, pelas taxas *forward* implícitas pelo preço do título em t . Em seguida, as curvas de rendimento, “*unsmoothed Fama-Bliss yields*”, são construídas de acordo com a equação (3).

Diebold e Li (2006) utilizam a *yield curve* construída a partir da curva *forward* de Nelson e Siegel (1987), na seguinte forma:

$$(8). \quad y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right)$$

A interpretação dos fatores em termos de longo, curto e médio prazos permanece válida. Os autores, porém, sugerem outra interpretação, em termos do efeito de cada fator na forma da curva de juros. O primeiro fator, de longo prazo, β_{1t} , controla o nível da curva, ou seja, uma mudança nesse fator tem o mesmo impacto nas taxas de todos os vencimentos. O segundo fator, de curto prazo, β_{2t} , afeta fortemente as taxas de vencimentos curtos, mas decai rapidamente a zero, com efeito irrelevante sobre vencimentos longos e é, portanto, visto como a inclinação da curva, ou, na realidade, o negativo da inclinação da curva, de forma que esperamos encontrar valores negativos para β_{2t} . O terceiro fator, de médio prazo, β_{3t} , é visto como o fator de curvatura da curva, já que tem valor zero para vencimentos curtos, sobe rapidamente até seu máximo e decai de novo a zero para vencimentos longos, consequentemente tendo maior impacto nos vencimentos no meio da curva. A figura 1 abaixo ilustra os efeitos dos carregamentos dos fatores para taxas de diferentes vencimentos, considerando-se $\lambda=0.0609$.

Figura 1 - Evolução dos carregamentos dos fatores



Diebold e Rudebusch (2012) compararam as estimativas dos fatores do modelo DNS com as medidas empíricas⁶ de nível, inclinação e curvatura da ETTJ e encontraram evidência não só de que os fatores representam as medidas empíricas com precisão, mas também de que os três componentes principais são equivalentes aos fatores latentes estimados.

Essa propriedade é especialmente interessante porque, uma vez que a construção dos componentes principais garante a ortogonalidade de uns em relação aos outros, é garantida também a ortogonalidade entre os fatores. Isso reforça a ideia de que é possível relacionar variáveis macroeconômicas à determinação do comportamento dos fatores, hipótese explorada por autores como Estrella e Hardouvelis (1991), Diebold et al (2006), Huse (2011) e Ang e Piazzesi (2003).

Outro elemento de importância no modelo proposto por Diebold e Li (2006) é o parâmetro λ , que determina a taxa de decaimento dos fatores e o vencimento em que o carregamento da curvatura atinge seu máximo. Os autores sugerem a fixação desse parâmetro em $\lambda=0.0609$, o valor que maximiza o carregamento da curvatura em 30 meses, a média entre os vencimentos de 2 e 3 anos.

Ao fixar λ , é possível evitar métodos não lineares e um grande número de otimizações numéricas que desafiariam a proposta de estimação parcimoniosa do modelo. Isso permite determinar β_{it} por meio de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO).

Outras contribuições, como Diebold et al. (2006), Caldeira et al. (2010) e Huse (2011) propõem modelos que estimam internamente um λ variável no tempo. Apesar de resultados encorajadores em termos de seus resultados de previsão, a simplicidade computacional, aliada a bons resultados na aplicação do modelo na academia e no mercado, como Almeida et al. (2007), continua a sugerir a fixação do parâmetro λ .

Outro ponto de simplicidade do modelo DNS é o seu método de estimação. A fixação do parâmetro de decaimento exponencial elimina a necessidade de

⁶ Os autores definem as medidas empíricas do nível, inclinação e curvatura da curva de juros como a taxa de 10 anos, o *spread* entre as taxas de 10 anos e 6 meses e o *spread* $6M+10Y-2*5Y$ (em que M corresponde a meses e Y a anos), respectivamente.

regressão não linear do modelo, permitindo que os autores utilizem MQO para estimar os fatores, $\{\beta_{it}\}$, $i=1, 2, 3$. O resultado dessa regressão é uma série temporal dos betas e um painel de erros de precificação.

Em seguida, os fatores são modelados na forma de um AR(1) com as seguintes especificações:

$$(9). \quad \hat{y}_{t+h/t}(\tau) = \hat{\beta}_{1,t+h/t} + \hat{\beta}_{2,t+h/t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \hat{\beta}_{3,t+h/t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right),$$

em que:

$$(10). \quad \hat{\beta}_{i,t+h/t} = \hat{c}_i + \hat{\gamma}_i \hat{\beta}_{it}, \quad i=1, 2, 3.$$

onde \hat{c}_i e $\hat{\gamma}_i$, são obtidos pela regressão de $\hat{\beta}_{it}$ sobre um intercepto e $\hat{\beta}_{i,t-h}$.

Diebold e Li (2006) testam o modelo contra uma variedade de competidores para previsões de 1, 6 e 12 meses de vencimentos de 3 meses, 1 ano, 3 anos, 5 anos e 10 anos, incluindo uma versão de sua própria especificação que substitui o uso de um AR(1) por um VAR(1). Outros *benchmarks* relevantes são um modelo de passeio aleatório, a regressão *forward* de Fama e Bliss (1987), a regressão *forward* de Cochrane e Piazzesi (2005) e AR(1)'s e VAR(1)'s sobre os níveis das taxas e sobre suas variações.

Os resultados podem ser resumidos como segue. Para previsões de 1 mês, o modelo apresentou resultados apenas marginalmente superiores ao modelo de passeio aleatório e ao modelo Fama e Bliss. As estatísticas de Diebold e Mariano (1995) para esse prazo revelam que as diferenças de erro padrão médio são insignificantes entre esses resultados.

Os autores verificam, porém, que os resultados melhoram significativamente à medida que o prazo de previsão aumenta. Após a melhoria nas previsões de 6 meses, a previsão de 12 meses do modelo apresenta resultados superiores a todos os competidores em todos os vencimentos, inclusive em termos das estatísticas Diebold-Mariano.

4.3.1. Críticas e extensões

Huse (2011), ao expor as especificações de seu modelo com fatores observáveis, critica a extração dos $\{\beta_{it}\}$ por meio de MQO, que leva em conta somente o aspecto de *cross-section* dos fatores, enquanto a estimação do modelo por meio do AR(1) considera apenas a dimensão de série temporal dos dados. Essa abordagem utiliza, portanto, os $\{\beta_{it}\}$ como dados, sem levar em conta os erros de sua estimação original.

Na crítica de Filipovic (1999) da modelagem Nelson-Siegel, ele aponta a impossibilidade de impor condições de não arbitragem a uma especificação dinâmica do modelo, ponto discutido também por Björk e Christensen (1999).

Por um lado, Diebold e Rudebusch (2012) ponderam que, se a realidade é livre de possibilidades de arbitragem e mesmo sem a imposição de condições de não arbitragem um modelo apresenta bom desempenho, então a imposição dessas condições provavelmente teria efeito pouco relevante.

Por outro lado, diversos trabalhos posteriores a Diebold e Li (2006) assumiram o desafio de tornar o DNS livre de arbitragem. Christensen et al. (2009), Christensen et al. (2011) e Diebold e Rudebusch (2012) destacam-se neste sentido utilizando o *one-step* DNS de Diebold et al. (2006). Eles apontam que uma característica central para a construção dessa especificação está no termo de ajustamento das taxas (*yield-adjustment term*), responsável por ligar as equações de transição e mensuração para garantir a ausência de oportunidades de arbitragem.

4.4. Adaptação e uso da classe Nelson-Siegel na modelagem dos determinantes macroeconômicos da ETTJ

Como discutido anteriormente em relação ao uso de fatores para a descrição da curva de juros, espera-se que o comportamento dos fatores do modelo Nelson-Siegel seja, de alguma forma, determinado pela evolução de variáveis macroeconômicas. O mesmo vale para modelos de não arbitragem, mas estes serão mencionados posteriormente.

Vamos descrever primeiramente o modelo proposto em Diebold et al. (2006) para o estudo da natureza da relação entre a macroeconomia e a ETTJ, ou seja, a análise de influências macro-para-ETTJ e ETTJ-para-macro.

No que os autores vêem como uma evolução em relação ao modelo proposto por Diebold e Li (2006), a curva de juros passa a ser modelada por meio de um espaço de estados (*state space*), que permite a aplicação de um filtro de Kalman que fornece estimações de máxima-verossimilhança, otimamente filtradas e suavizadas, dos fatores que governam a curva de juros.

Além disso, a estimação pelo método de espaço de estados é executada em um passo, originando o nome mencionado na última subseção, *one-step* DNS. A estimação de todos os parâmetros simultaneamente produz melhores inferências, em oposição à proposta Diebold-Li, que realiza a estimação em dois passos e tem os problemas apontados por Huse (2011). Esta é a variação do DNS modificada por Christensen et al. (2009), Christensen et al. (2011) e Diebold e Rudebusch (2012) para atender também às condições de não arbitragem.

Uma vez especificado o modelo na forma de espaço de estados, ele é chamado *yields only*, ou seja, exclusivamente da ETTJ. Em seguida, Diebold et al. (2006) especificam um novo modelo que inclui variáveis macroeconômicas entre os fatores. Essas variáveis são: capacidade utilizada da indústria, a taxa de juros dos fundos federais e a inflação anual.

O modelo especificado proporciona a estimação simultânea dos parâmetros, permitindo testar o poder de influência de cada elemento do modelo sobre o outro. Tais testes revelam, por sua vez, uma relação bidirecional, o que significa dizer que se observa influência de fatores macro sobre a determinação da ETTJ, macro-para-ETTJ, e influência da ETTJ sobre a atividade econômica, ETTJ-para-macro. É importante observar, porém, que os testes evidenciam que o efeito macro-para-ETTJ é maior.

Partindo dessa evidência, Huse (2011) propõe uma modificação do modelo DNS para considerar fatores observáveis no lugar dos fatores latentes da especificação original, substituindo a estimação do AR(1) por uma otimização

não linear (já que não fixa λ) de uma função de variáveis observáveis. Essa alternativa fornece estimativas precisas ante os modelos *benchmark* DNS e *one-step* DNS, além de permitir, também, interpretar a influência de certas variáveis macroeconômicas sobre os fatores da ETTJ, nomeadamente da atividade econômica e inflação sobre o fator de nível, da atividade econômica e política monetária sobre o fator de inclinação e da política fiscal sobre o fator de curvatura

Huse (2011) aponta, ainda, que a abordagem Nelson-Siegel apresenta robustez diante do problema de dimensionalidade. Isso significa que a classe Nelson-Siegel evita que se necessite aumentar a dimensão do vetor de parâmetros dado um aumento no número de títulos estudados. Tal necessidade só ocorre com um aumento do número de variáveis que os explica.

Leite et al. (2009) propõem um modelo da curva de juros com variáveis macroeconômicas para o Brasil, que denominam modelo Prêmio/Expectativa. A especificação procura manter a simplicidade dos modelos Nelson-Siegel, propondo um modelo dinâmico que utiliza a contribuição de Svensson ao incluir um segundo fator de curvatura, e incorpora informações macroeconômicas, dados de pesquisa de mercado e prêmios de risco de taxas a termo.

Os primeiros elementos são incorporados pela utilização das expectativas de inflação coletadas pelo Banco Central do Brasil (BCB) junto às instituições financeiras. O prêmio de risco de vencimento, inserido em razão da observação de Duffee (2002) sobre sua importância para a atividade de previsão, é modelado como a diferença entre a taxa *forward* de um título com vencimento τ e a taxa Selic⁷:

$$(11). \quad \eta(t, \tau) = f(t, \tau) - Selic_t$$

Por fim, os autores, com o objetivo de dar fundamento econômico ao comportamento do prêmio de risco, especificam uma relação linear entre este e a expectativa de inflação:

⁷ A taxa Selic é a média das taxas das operações de 1 dia executadas no âmbito do Sistema Especial de Liquidação e Custódia – SELIC.

$$(12). \quad \eta(t, \tau) = \gamma_1 IPCA_t + \gamma_0$$

em que o $IPCA_t$ é a expectativa para o $IPCA^8$ no período t para o primeiro IPCA não divulgado. Leite et al. (2009) detalham, ainda, que os parâmetros γ_0 e γ_1 são estimados por MQO e os parâmetros da forma funcional de Svensson λ_1 e λ_2 foram fixados em 3.58 e 7.17, respectivamente.

O modelo Prêmio/Expectativa, estimado para dados entre 2002 e 2007, obteve resultados superiores ao passeio aleatório e ao DNS, em termos de erro quadrático médio, no exercício de previsão de taxas de 1 mês, 6 meses, 1 ano, 1 ano e meio, 2 anos e 3 anos para o período seis meses à frente.

4.5. Abordagem de equilíbrio geral

A abordagem de equilíbrio se baseia na descrição do comportamento otimizador dos agentes e nas implicações que esse comportamento tem sobre a escolha de ativos de renda fixa em equilíbrio, no âmbito de um modelo DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*). O artigo seminal dessa abordagem foi de Cox et al (1985) (CIR).

Cox et al. (1985), desenvolvem uma descrição intertemporal completa de uma economia competitiva em tempo contínuo. Essa abordagem possibilita a especificação de diferentes modelos, de acordo com a escolha das variáveis explicativas.

O modelo desenvolvido pelos autores aborda a estimação da curva de juros como um problema de teoria de equilíbrio geral, considerando elementos como antecipação de eventos futuros, preferências de risco, características de outras alternativas de investimento e preferência no *timing* de consumo.

Nesse sentido, portanto, o objetivo é a criação de um modelo que permita tanto a estimação da ETTJ pela descrição das influências das variáveis que a determinam, como a exploração das teorias a ela ligadas.

⁸ IPCA é o Índice de Preços ao Consumidor Amplo, calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

CIR observa que, pelo mapeamento de todas as taxas de juros dispostas no tempo, a ETTJ reflete as expectativas do mercado sobre eventos futuros concernentes às variáveis que governam a determinação de preços e taxas de títulos. A busca de uma explicação do comportamento da ETTJ é, desta forma, uma tentativa de compreender como movimentos em variáveis afetam a dinâmica da curva de juros.

A lógica dessa proposta de modelagem baseia-se na combinação de hipóteses sobre a caracterização do estado de desenvolvimento tecnológico dessa economia, sobre a evolução da tecnologia e sobre as taxas de retorno esperadas do investimento nos processos produtivos. A partir dessas hipóteses, a determinação das taxas de juros à vista segue um processo de difusão⁹, como já havia proposto anteriormente Vasicek (1977), e a dinâmica futura das taxas de juros é expressa como um processo auto-regressivo de primeira ordem.

A abordagem de equilíbrio, por fim, permite, em uma economia competitiva com agentes intertemporalmente maximizadores, a obtenção de uma curva de juros condizente com a teoria: o preço dos títulos é uma função convexa decrescente da taxa de juros e crescente do tempo até o vencimento.

Há alguns problemas, entretanto, em relação às premissas irreais de alguns parâmetros, principalmente o de aversão ao risco e o de elasticidade intertemporal de substituição, para que o modelo seja consistente e capaz de reproduzir as formas da ETTJ mencionadas acima, como aponta Huse (2011).

Outras importantes contribuições procuram desenvolver um modelo mais abrangente sem precisar recorrer a premissas pouco razoáveis sobre o comportamento dos agentes. Berardi (2009), por exemplo, procura construir uma estrutura interna robusta, capaz de investigar as restrições que o *cross-section* de dados impõe à ligação entre a ETTJ, a atividade real e a inflação, de produzir estimativas confiáveis de elementos não observáveis tais como ETTJ,

⁹ Um processo de difusão é um processo de Markov contínuo. Dada uma variável $y(\tau)$, diz-se que ela segue um processo de Markov caso o processo que leva a sua realização no período $t+1$ depende unicamente do seu nível no tempo t , mas não do processo que levou a esse nível. Quando um processo de Markov é contínuo, ele é um processo de difusão (VASICEK, 1977).

inflação esperada e prêmio de risco de inflação e de gerar previsões precisas sobre taxas de inflação futura e taxas de crescimento do PIB.

4.6. Abordagem de não arbitragem

A última abordagem, tratada na literatura como *affine no-arbitrage term structure models*, e aqui descrita como modelos de não arbitragem, utiliza o modelo de equilíbrio geral somente em sua estrutura mais básica, ou seja, impõe à modelagem da ETTJ condições de ausência de oportunidades de arbitragem. Esta tem sido a alternativa usual à modelagem Nelson-Siegel, principalmente por sua qualidade em modelar a ETTJ em um ponto específico no tempo e pela importância dessa característica para precificação de derivativos.

A contribuição seminal de Vasicek (1977) delineou o procedimento geral seguido pelas evoluções posteriores neste ramo de modelagem e é exposto em maior detalhe a seguir.

O modelo proposto parte da definição de uma taxa *forward*, interpretada por Vasicek como a taxa de retorno marginal dada pelo comprometimento de recursos em um título por um momento adicional. A taxa de juros à vista instantânea, ou *spot*, dada por $y(\tau)$, é a variável de estado que vai determinar o comportamento da curva de rendimentos. Ela é dada pela mesma equação (3) descrita por McCulloch (1971,1975). A taxa de juros $y(\tau)$ é, então, definida, por hipótese, como um processo de difusão, característica central dos modelos de não arbitragem.

Vasicek impõe ainda outras duas hipóteses, importantes para o desenvolvimento do argumento de não arbitragem. A primeira garante que o preço de um título em um período é função somente do processo esperado da taxa *spot* entre o período atual e o seu período de vencimento mais uma função que pode ser especificada em termos do período atual, do tempo até o vencimento e da taxa de juros, de acordo com a teoria de ETTJ assumida.

A segunda é a hipótese de mercados eficientes. Esta se traduz na ausência de custos de transação, ausência de assimetrias informacionais e racionalidade por parte dos investidores.

A implicação dessas três hipóteses é que os investidores têm expectativas homogêneas e, portanto, não há oportunidades de arbitragem no mercado. Da ausência de oportunidades de arbitragem decorre que a taxa de juros *spot* é a única variável de estado para a caracterização de toda a ETTJ e, para a aplicação do modelo são necessárias, adicionalmente, somente estimativas dos parâmetros de *drift* e variância do processo da taxa *spot* e do preço de mercado do risco (que especifica o incremento da taxa de retorno esperada de um título dada uma unidade adicional de risco).

As contribuições mais recentes dessa linha de pesquisa, como Duffie e Kan (1996) e Duffee (2002), usualmente fazem uso de modelos de autorregressão vetorial (VAR) para estimação dos parâmetros, procurando descrever também a dinâmica da evolução da curva de juros.

Primeiramente, são definidos a taxa de juros instantânea e os preços de risco para os fatores que se supõem afetar a curva de juros, esses representados como funções de variáveis de estado, como atividade econômica e inflação. Em seguida, dadas as condições de não arbitragem, verificam-se as implicações de precificação de ativos da estrutura imposta ao modelo.

O modelo cuja utilização se tornou mais disseminada e que serviu de base para outras extensões importantes foi Duffie e Kan (1996), em que a ETTJ é uma função afim de fatores latentes e cujos carregamentos, que garantem a ausência de oportunidades de arbitragem, são calculados a partir de um sistema de equações diferenciais.

Duffee (2002) analisa o desempenho dessa família de modelos e observa que seus resultados empíricos para a descrição das séries temporais e para a realização de previsão da curva de juros são insatisfatórios. Ele aponta, ainda, que, em grande parte dos casos, tais modelos apresentam desempenho inferior ao obtido com um passeio aleatório.

Adicionalmente, o grande número de parâmetros envolvidos na estimação desse tipo de modelos leva a dificuldades computacionais, muitas vezes superadas pela assunção de valores sem motivação teórica, e à superparametrização (*overparameterization*) dos modelos. Cabe notar que tais

características negativas do ponto de vista preditivo não parecem atrapalhar o desempenho desse gênero de modelos no seu uso mais comum, a precificação de ativos.

Assim como a família Nelson-Siegel, a modelagem de não arbitragem também tem contribuições no que tange à exploração do papel de variáveis macroeconômicas na determinação da ETTJ. O trabalho mais relevante é o de Ang e Piazzesi (2003), que utilizam medidas próprias de atividade real e inflação como fatores e observáveis em conjunto com fatores latentes para a descrição da dinâmica da ETTJ por meio de vetores autorregressivos (VAR).

Os resultados mostram que choques no produto têm impacto relevante em taxas de média prazo e na curvatura da curva, enquanto choques na inflação têm efeitos sobre o nível da curva. Essas evidências reforçam a interpretação de fatores de Diebold e Li (2006) e Diebold et al. (2006) e, em alguma medida, a evidência de variáveis macroeconômicas encontrada por Huse (2011), apesar de diferenças nas especificações das variáveis e dos dados utilizados.

Algumas das mais recentes e importantes abordagens foram realizadas por Ang et al (2006), Christensen et al (2010), Dai e Singleton (2000) e Dai e Singleton (2002) entre outros.

5. Estimação da Estrutura a Termo das Taxas de Juros

Esta seção se encarregará de estimar os modelos Nelson-Siegel e Diebold-Li para dados do Tesouro norte-americano, utilizando o pacote `termstrc`, de Ferstl e Hayden (2010) para o *software* R.

O modelo Nelson-Siegel descreve a ETTJ em um ponto no tempo, de forma que sua estimação para todo o período dos dados resulta em uma série de curvas estimadas. O modelo Diebold-Li, por sua vez, é uma extensão do Nelson-Siegel com parâmetros que variam no tempo.

Com o benefício da análise retrospectiva, o objetivo das estimações é comparar o desempenho dos modelos na descrição das curvas de juros observadas no período sob análise e discutir a motivação macroeconômica de

movimentos observados da ETTJ, de acordo com a literatura do tema explorada na seção 4.4.

Nesse sentido, portanto, não será dado foco à estimação fora da amostra. Com esse objetivo, Diebold e Li (2006) utilizam dados do Tesouro norte-americano entre 1985 e 2000 para a estimação fora da amostra comparando sua proposta de modelagem com outras 10 especificações. Os resultados apontam para superioridade do modelo Diebold-Li, principalmente para previsões 12 meses à frente.

Outros trabalhos, como Huse (2011), também realizam testes de estimação fora da amostra em extensões do modelo Diebold-Li. Huse (2011) testa suas especificações na previsão de cinco recessões oficiais nos EUA, obtendo erros em relação às taxas observadas consistentemente menores que aqueles do modelo Diebold-Li. Os resultados sugerem que a inclusão de variáveis observáveis como fatores num modelo da classe Nelson-Siegel acarreta significativa melhora na capacidade preditiva do modelo.

5.1. Dados

Os dados utilizados são taxas de títulos do Tesouro norte-americano de fim de mês, no período entre janeiro de 2004 e dezembro de 2012, fornecidos publicamente na página de *Internet* do *Federal Reserve Board*¹⁰ em vencimentos fixos de 1 mês, 3 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, 3 anos, 5 anos, 7 anos, 10 anos e 20 anos.

A escolha do período foi realizada com o intuito de verificar o comportamento das taxas no período anterior à crise de 2008 e sua evolução até o passado recente. Espera-se que as curvas de juros reflitam a incerteza que permeou a economia norte-americana e a queda das taxas de juros de curto e médio prazos como incentivo ao crescimento do produto.

A intenção original era utilizar dados de títulos públicos brasileiros. Infelizmente, em razão da falta de padronização na emissão e nos vencimentos

¹⁰ <http://www.federalreserve.gov/datadownload/Choose.aspx?rel=H15>, acessado em 12/07/2013, 20:30. Seleção de arquivos especificada no texto. As taxas são originárias do banco TCMNOM, fornecidas para vencimentos fixos em frequência diária, em porcentagem ao ano.

desses títulos no passado recente, a prática comum para a estimação da ETTJ com fins acadêmicos é a utilização de dados de Futuro de DI, inacessíveis ao autor.

5.2. Modelos e Estimação

O modelo Nelson-Siegel, conforme descrito na seção 4.1, é dado pela taxa *forward*:

$$(4). \quad f(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \cdot e^{-\lambda\tau} + \beta_3 (\lambda\tau \cdot e^{-\lambda\tau})$$

Da taxa *forward* acima, Nelson e Siegel utilizam a equação (3) para construir a curva à vista, seguindo McCulloch (1971, 1975):

$$(5). \quad y(\tau) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \frac{(1 - e^{-\lambda\tau})}{\lambda\tau} - \beta_3 \cdot e^{-\lambda\tau}$$

Para cada observação, a função objetivo é a minimização dos erros quadráticos das taxas estimadas. Os coeficientes $\{\beta_i\}$, $i=1, 2, 3$, são determinados por meio de mínimos quadrados. É realizada uma busca iterativa de parâmetros iniciais que encontra os valores ótimos de λ que resolvem o problema de minimização da função objetivo.

Diebold e Li (2006) utilizam a curva à vista construída a partir da proposta de Nelson e Siegel (1987) na seguinte forma:

$$(8). \quad y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right)$$

Os autores sugerem a fixação do parâmetro λ em $\lambda=0.0609$, o valor que maximiza o carregamento da curvatura em 30 meses, a média entre os vencimentos de 2 e 3 anos. Conforme exposto anteriormente, a fixação do parâmetro de decaimento exponencial elimina a necessidade de regressão não

linear do modelo. Isso possibilita o uso de MQO para a estimação dos fatores, $\{\beta_{it}\}$, $i=1, 2, 3$. O resultado dessa regressão é uma série temporal dos betas e um painel de erros de precificação.

Em seguida, os fatores são modelados na forma de um AR(1) com as seguintes especificações:

$$(9). \quad \hat{y}_{t+h/t}(\tau) = \hat{\beta}_{1,t+h/t} + \hat{\beta}_{2,t+h/t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \hat{\beta}_{3,t+h/t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right)$$

em que:

$$(10). \quad \hat{\beta}_{i,t+h/t} = \hat{c}_i + \hat{\gamma}_i \hat{\beta}_{it}, \quad i=1, 2, 3.$$

onde \hat{c}_i e $\hat{\gamma}_i$, são obtidos pela regressão de $\hat{\beta}_{it}$ sobre um intercepto e $\hat{\beta}_{i,t-h}$.

As figuras 2 e 3 mostram gráficos das estimativas dos modelos Nelson-Siegel e Diebold-Li.

Figura 1 - Estimativas Nelson-Siegel

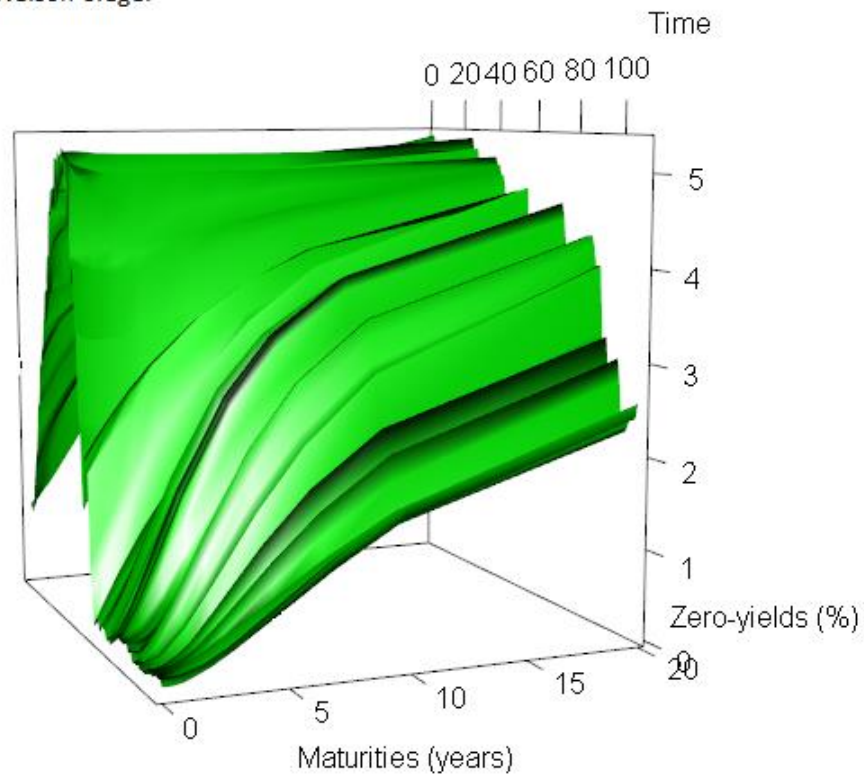
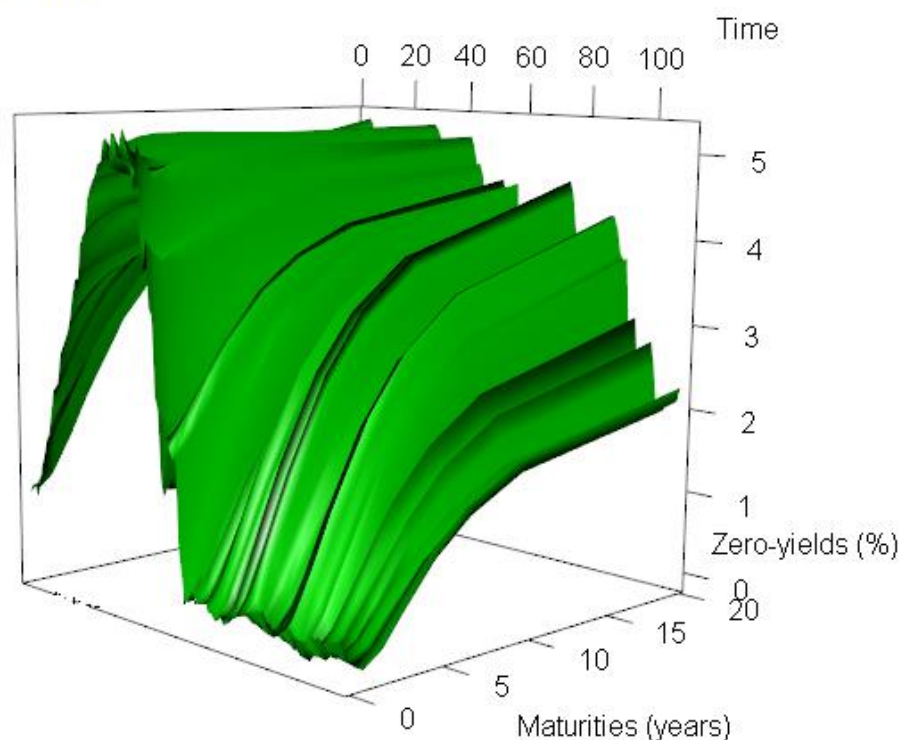


Figura 3 - Estimativas Diebold-Li



Os gráficos mostram que os resultados dos dois modelos são bastante próximos. A tabela¹¹ 1 contém estatísticas de ajuste de ambos os modelos, mostra que as estimativas do modelo Nelson-Siegel foram superiores tanto em termos de erro padrão quanto em termos de erro absoluto médio. Isso provavelmente se deve à fixação do parâmetro λ no modelo Diebold-Li. Apesar de esse procedimento ser vantajoso na utilização do modelo para previsão fora da amostra, a estimação de λ internamente para cada período, como feito no modelo Nelson-Siegel, parece render melhores resultados na descrição da ETTJ.

Tabela 1 - Estatísticas de Ajuste		
	Diebold-Li	Nelson-Siegel
RMSE-Yields (%)	0.1275279	0.07440787
AABSE-Yields (%)	0.1009264	0.04998509

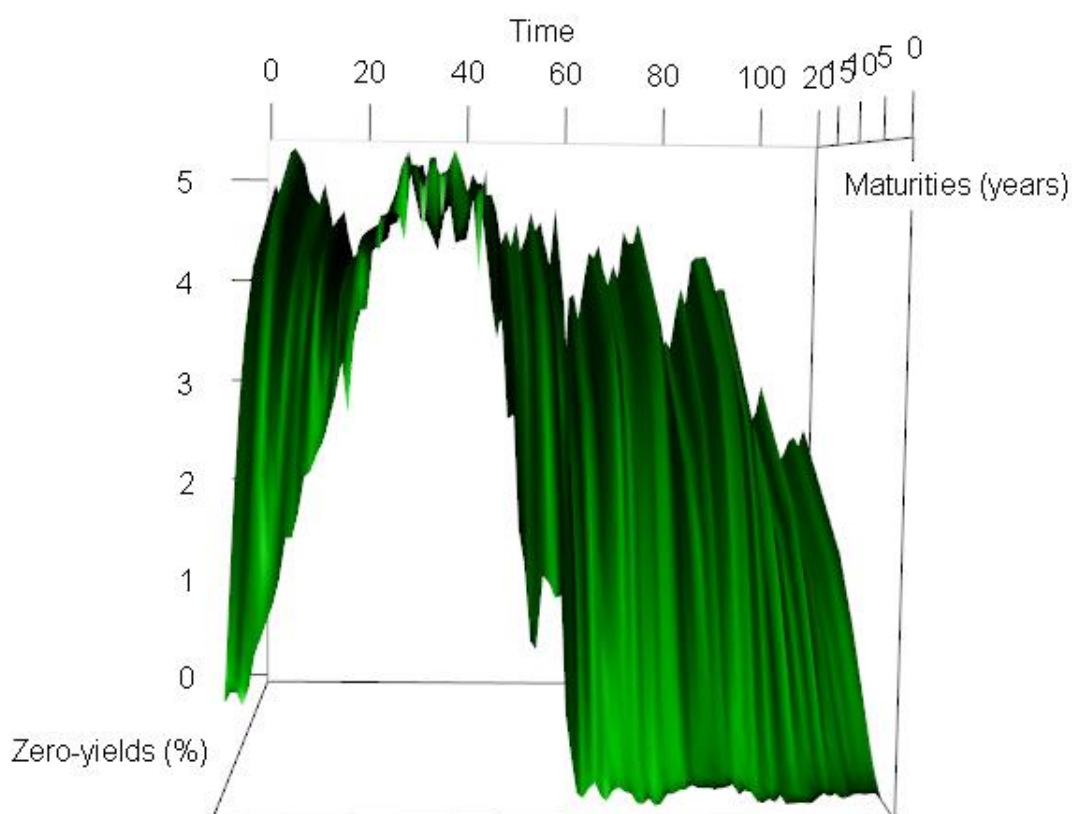
A evolução da ETTJ em relação a acontecimentos na economia dos EUA reforça a ideia de que a curva de juros está ligada a algum conjunto de variáveis macroeconômicas. O começo da amostra apresenta o

¹¹ RMSE significa *root mean squared error*, ou erro-padrão. AABSE significa *average absolute mean error*, ou erro absoluto médio.

comportamento médio da ETTJ, ascendente. As taxas à vista de vencimentos de curto e médio prazos, porém, crescem num ritmo estável, coincidente com o crescimento da bolha imobiliária norte-americana, atingindo um patamar mais elevado, em que a ETTJ fica mais achatada e apresenta uma leve inversão, com taxas de vencimentos curtos maiores que aquelas de vencimentos mais longos. Esse achatamento possivelmente marca o início do declínio dos preços imobiliários no mercado norte-americano. Tal movimento ocorre entre as observações 25 e 45, ou seja, entre janeiro de 2006 e setembro de 2007, período que compreende a explosão da bolha.

A mudança no comportamento da ETTJ pode ser interpretada conforme argumento de Huse (2011), que aponta que recessões são normalmente precedidas de uma inversão da curva de juros. O comportamento das taxas de vencimento mais curto é destacado na figura 4, em primeiro plano.

Figura 4 - Estimativas Nelson-Siegel - vencimentos curtos em primeiro plano

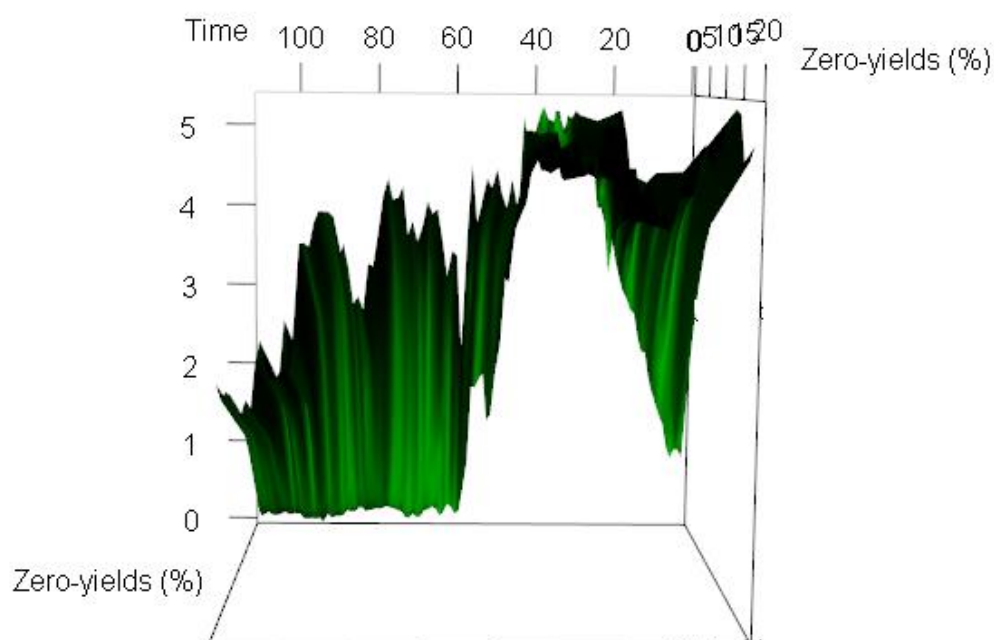


A reversão dos preços imobiliários é refletida por uma nova mudança no comportamento da ETTJ entre outubro de 2007 e outubro de 2008, que mostra

taxas mais curtas voltando a patamares mais baixos. A crise tem início ao final do ano de 2008. A recessão iniciada em dezembro de 2007, as políticas de salvamento de bancos e incentivo à atividade econômica parecem refletir-se também na ETTJ.

A partir da observação 57, setembro de 2008, a ETTJ descreve taxas de curto prazo muito próximas de 0% a.a. e uma queda das taxas de longo prazo, de 10 a 20 anos, para o intervalo entre 2,5% a.a. e 3,5% a.a. As taxas de longo prazo se encontram em primeiro plano na figura 5.

Figura 5 - Estimativas Nelson-Siegel - vencimentos longos em primeiro plano



As figuras 6 e 7 abaixo contêm gráficos dos comportamentos dos fatores da série de estimativas dos modelos Nelson-Siegel e Diebold-Li. A série completa de parâmetros encontra-se no apêndice A.

Figura 6 - Parâmetros Nelson-Siegel

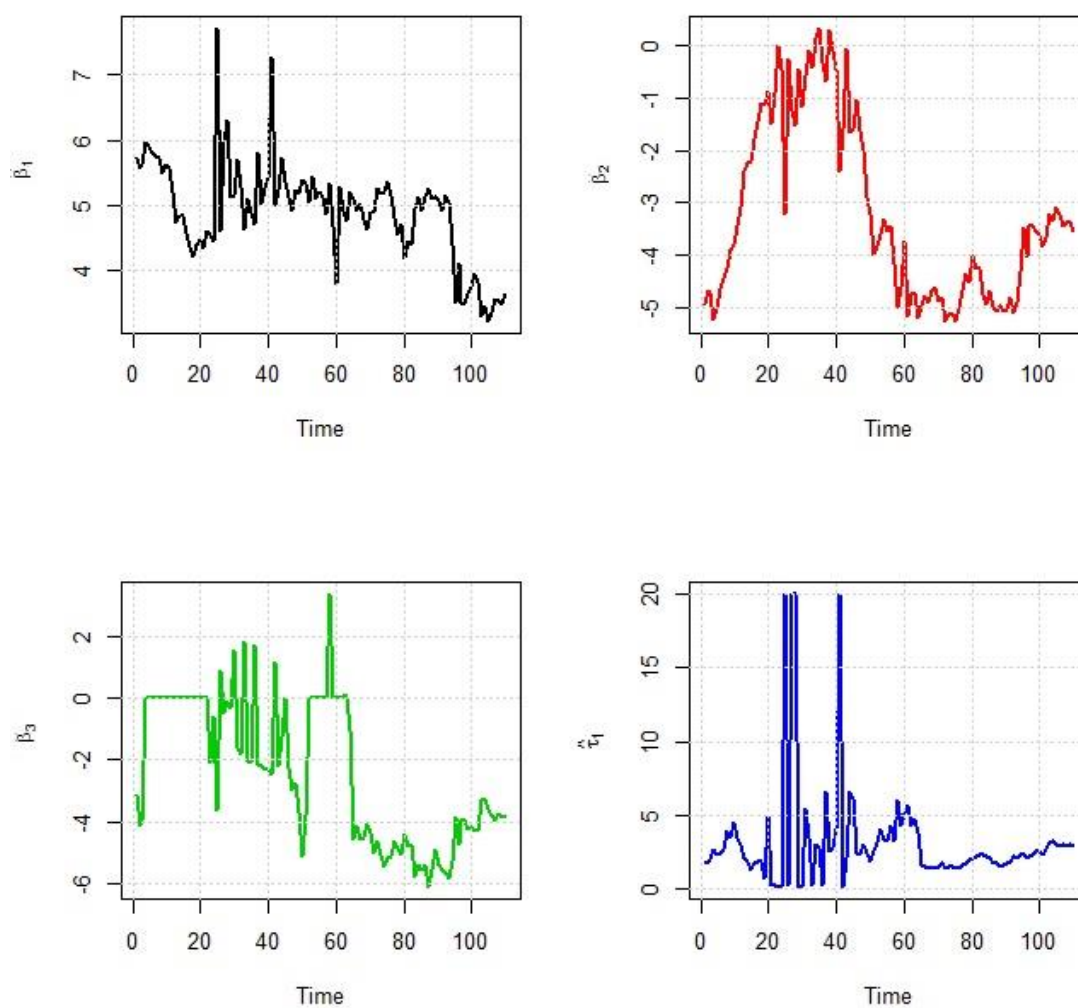
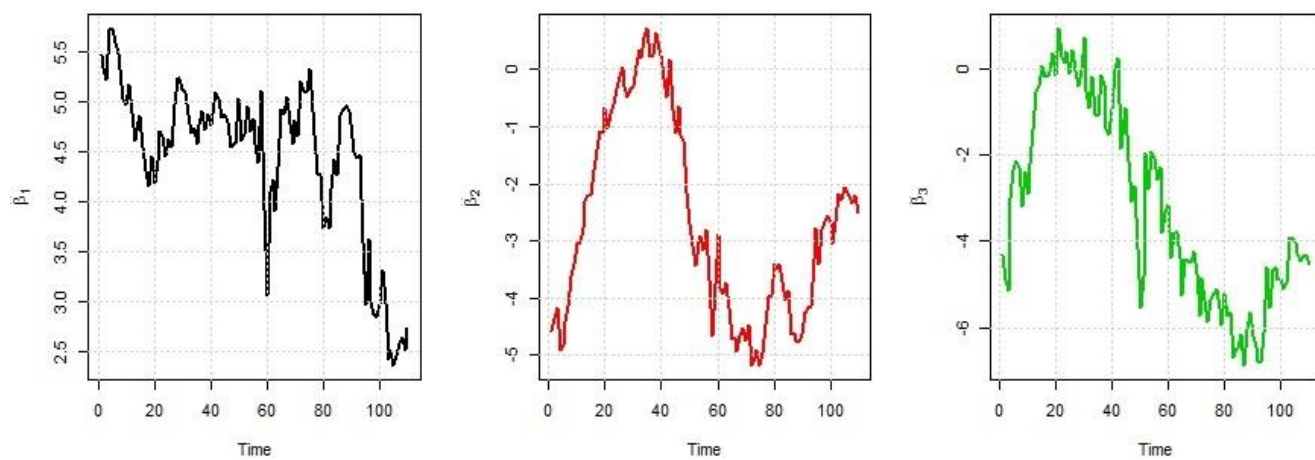


Figura 7 - Parâmetros Diebold-Li



Em primeiro lugar, o fator β_1 é positivo para todas as estimativas, como é de se esperar, dada sua interpretação de nível da ETTJ. Os dois métodos apresentam intervalos próximos de suas estimativas desse primeiro fator.

A aproximação empírica do nível da ETTJ é, como mencionado anteriormente, a taxa de 10 anos. De acordo com as contribuições que procuram incorporar e interpretar elementos macroeconômicos na ETTJ, a persistência desse fator e sua interpretação como determinante do nível da ETTJ estão ligadas a expectativas de inflação, tendo em vista o comportamento relativamente estável desta, em termos de nível.

Como esperado, os valores de β_2 mostraram-se predominantemente negativos, já que este fator representa o oposto da inclinação da ETTJ. A aproximação empírica da inclinação da curva de juros é o *spread* entre as taxas de 10 anos e 3 meses. Os valores positivos ou mais próximos de zero, que ocasionam a inversão da ETTJ descrita anteriormente, significam uma aproximação entre as taxas de 3 meses e 10 anos. Essas ocorrências coincidem com o declínio da bolha do mercado imobiliário dos EUA e com o período em que o mercado poderia estar precificando o início da recessão começada oficialmente em dezembro de 2007, de acordo com o Federal Reserve Board. A inversão da ETTJ seguida de uma recessão, de acordo a interpretação de Estrella e Hardouvelis (1991), sugere que a inclinação da ETTJ pode ser utilizada para a previsão do produto.

Apesar de β_3 ser identificado como um fator de curvatura por Diebold e Li (2006) não há, até o momento, consenso sobre a sua interpretação macroeconômica. Essa falta de consenso reflete-se também na análise das correlações entre os parâmetros beta.

A análise das correlações pode ser realizada com auxílio das tabelas 2 e 3. Nota-se que β_1 apresenta baixa correlação com o fator β_2 , enquanto tanto β_1 quanto β_2 apresentam maior correlação com β_3 . Essa observação reflete a indeterminação na literatura sobre o fundamento macroeconômico do fator de curvatura.

Tabela 2 - Correlação entre os parâmetros (Nelson-Siegel)				
	beta_1	beta_2	beta_3	1/lambda
beta_1	1	-0.02078353	0.1899568	0.50102071
beta_2	-0.02078353	1	0.4776085	0.09823647
beta_3	0.18995678	0.47760849	1	0.14539105
1/lambda	0.50102071	0.09823647	0.1453911	1

Tabela 3 - Correlação entre os parâmetros (Diebold-Li)			
	beta_1	beta_2	beta_3
beta_1	1	-0.07510384	0.2716599
beta_2	-0.07510384	1	0.7745686
beta_3	0.27165994	0.77456861	1

Trabalhos como os de Diebold et al. (2006), Ang e Piazzesi (2003) e Huse (2011) propõem modelos que incluem fatores de curvatura para a descrição da ETTJ mas diferem na discussão de sua motivação econômica. Enquanto o primeiro trabalho não propõe nenhuma identificação para o fator de curvatura, Ang e Piazzesi (2003) sugerem conexão com o produto e Huse (2011) com a política fiscal.

6. Conclusão

O objetivo deste trabalho foi desenhar um panorama geral sobre a ETTJ e sua modelagem. Foram discutidos, em primeiro lugar, o motivo da existência e da utilização da ETTJ e as três principais teorias que tentam explicar o comportamento das taxas à vista no tempo.

Em seguida, a classe de modelos Nelson-Siegel foi explorada em maior detalhe. Isso foi feito por meio da apresentação de três modelos, o modelo original de Nelson e Siegel (1987), a extensão de Svensson (1994) e extensão dinâmica de Diebold e Li (2006). A literatura que procura incluir fundamentos macroeconômicos ao comportamento dos fatores da estrutura Nelson-Siegel também foi alvo de atenção, especialmente em relação às proposições sobre sua conexão com variáveis de inflação e produto.

As outras classes de modelos, de equilíbrio e de não arbitragem, tiveram seus procedimentos gerais de estimação expostos. Os trabalhos seminais de cada

modelagem foram explorados no sentido de capturar o racional por trás das diversas extensões presentes atualmente.

Finalmente, no intuito de realizar uma análise comparativa, os modelos Nelson-Siegel e Diebold-Li foram estimados para dados do Tesouro norte-americano e utilizados para a avaliação da capacidade do comportamento da ETTJ fornecer informações qualitativas sobre eventos econômicos. O modelo Nelson-Siegel mostrou-se levemente superior ao Diebold-Li em termos de erro padrão e erro absoluto médio.

Tendo como período da amostra os anos de 2004 a 2012, observou-se, com o benefício da análise retrospectiva, que as propostas de motivação macroeconômica da ETTJ como em Huse (2011) e Diebold et al. (2006) encontram evidência empírica que sugere a busca por uma especificação capaz de agregar todos os efeitos macroeconômicos sobre o comportamento da curva de juros.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, C., SIMONSEN, A. e VICENTE, J. **Forecasting bond yields with segmented term structure models.** Working paper Banco Central do Brasil, n. **288**, 2012.

ALMEIDA, C., GOMES, R, LEITE, A. e VICENTE, J. **Does curvature enhance forecasting?** Working paper Banco Central do Brasil, n. **155**, 2007.

ANG, A. , PIAZZESI, M. e WEI, M. **What does the yield curve tell us about GDP growth?** *Journal Econometrics*, v. **131**, p. 359-403, 2006.

ANG, A. e PIAZZESI, M. **A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables.** *Journal of Monetary Economics*, n. **50**, p. 745-787, 2003.

BIANCHI, F., MUMTAZ, H. e SURICO, P. **The great moderation of the term structure of UK interest rates.** *Journal of Monetary Economics*, n. **56**, p. 856-871, 2009.

BERARDI, A. **Term Structure, Inflation and Real Activity.** *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. **44**, n. **4**, p. 987-1011, 2009.

BJORK, T. e CHRISTENSEN, D. **Interest rate dynamics and consistent forward rates.** *Mathematical Finance*, v. **9**, p. 323-348, 1999.

BOLDER, D. e STRÉLISKI, D. **Yield curve modeling at the Bank of Canada.** Technical Report n. **84**, 1999.

CHEN, N. **Financial investment opportunities and the real economy.** Working paper, n. **266**, Center for Research in Security Prices, University of Chicago, 1989.

CHRISTENSEN, J.H.E, LOPEZ, J.A. e RUDEBUSCH, G.D. **Inflation Expectations and Risk Premiums in an Arbitrage-Free Model of Nominal and Real Bond Yields.** *Journal of Money, Credit and Banking*, n. **42**, p. 143-178, 2010.

- CHRISTENSEN, J.H.E, LOPEZ, J.A. e RUDEBUSCH, G.D. **The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models.** *Journal of Econometrics*, n. **164**, p. 4-20, 2011.
- COCHRANE, J.H. e PIAZZESI, M. **Bond risk premia.** *American Economic Review*, n. **95**, p. 138-160, 2005.
- COX, J. , INGERSOLL, J. E. e ROSS, S. A. **An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices.** *Econometrica*, v. **53**, p. 363-384, 1985a.
- COX, J. , INGERSOLL, J. E. e ROSS, S. A. **A Theory of the Term Structure of Interest Rates.** *Econometrica*, v. **53**, p. 385-407, 1985b.
- DAI, Q., SINGLETON,K. **Specification analysis of affine term structure models.** *Journal of Finance*, n. **55**, p. 1943-1978, 2000.
- DAI, Q., SINGLETON,K. **Expectation puzzles, time-varying risk premia, and affine models of the term structure.** *Journal of Financial Economics*, n. **63**, p. 415-441, 2002.
- DIEBOLD, F. e LI, I. **Forecasting the term structure of government bond yields.** *Journal of Econometrics*, v. **130**, p. 337-364, 2006.
- DIEBOLD, F. e MARIANO, R.S. **Comparing predictive accuracy.** *Journal of Business and Economic Statistics*, v. **13**, p. 253-263, 1995.
- DIEBOLD, F., RUDEBUSCH, G. e ARUOBA, S. **The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach.** *Journal of Econometrics*, v. **131**, p. 309-338, 2006.
- DIEBOLD, F. X. e RUDEBUSCH, G. **Yield curve modeling and forecasting.** *The Econometric and Tinbergen Institutes Lectures*, Princeton University Press: Princeton and Oxford, 2012.
- DUFFEE, G. **Term premia and interest rate forecasts in affine models.** *Journal of Finance*, n. **57**, p. 405-433, 2002.
- DUFFIE, D. e KAN, R. **A yield-factor model of interest rates.** *Mathematical Finance*, v. **6**, p. 379-406, 1996

ESTRELLA, A. e HARDOUVELIS, G. A. **The term structure as a predictor of real economic activity.** *The Journal of Finance*, v. **46**, n. **2**, p. 555-576, 1991.

ESTRELLA, A. e MISHKIN, F.S. **Predicting US recessions: financial variables as leading indicators.** *Review of Economics and Statistics*, n. **80**, p. 45-61, 1998.

FABOZZI, F.J. **Fixed Income Analysis.** John Wiley & Sons, Inc., **2^a ed**, Hoboken, New Jersey, 2007.

FAMA, E. e BLISS, R. **The information in long-maturity forward rates.** *American Economic Review*, v. **77**, p. 680-692, 1987.

FERSTL, R. e HAYDEN, J. **Zero-coupon yield curve estimation with the package termstrc.** *Journal of Statistical Software*, n. **36**, v. **1**, p. 1-34, 2010.

FRIEDMAN, M. **Time perspective in demand for money.** *Unpublished paper*, Chicago: University of Chicago, 1977.

FILIPOVIC, D. **A note on the Nelson-Siegel family.** *Mathematical Finance*, v. **9**, p. 349-359, 1999.

GURKAYNAK, R. S., SACK, B. e WRIGHT, J.H. **The US Treasury yield curve: 1961 to the present.** Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board, 2006.

HEATH, D., JARROW, R. e MORTON, A. **Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation,** *Econometrica*, n. **60**, p. 77-105, 1992.

HICKS, J.R. **Value and capital**, Clarendon, 2^aed, 1946.

HULL, J. e WHITE, A. **Pricing interest-rate-derivative securities.** *Review of Financial Studies*, n. **3**, p. 573-592, 1990.

HUSE, C. **Term structure modeling with observable state variables.** *Journal Banking and Finance*, n. **35**, p. 3240-3252, 2011.

LEITE, A., GOMES R. e VICENTE, J. **Previsão da curva de juros: um modelo estatístico com variáveis macroeconômicas**. Working paper Banco Central do Brasil, **186**, 2009.

LUCAS, R. **Econometric policy evaluation: a critique**. *The Phillips Curve and Labor Markets*, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy 1, New York: American Elsevier, p. 19-46.

MCCULLOCH, J.H. **Measuring the Term Structure of Interest Rates**. *Journal of Business*, v. **44**, p. 19-31, 1971.

MCCULLOCH, J.H. **The tax-adjusted yield curve**. *Journal of Finance*, v. **30**, p. 811-830, 1975.

NELSON, C. e SIEGEL, A. **Parsimonious modeling of yield curves**. *Journal of Business*, v. **60**, n. 4, p. 473-489, 1987.

TABAK, Benjamin Miranda e ANDRADE, Sandro Canesso de. **Testing the Expectation Hypothesis in the Brazilian Term Structure of Interest Rates**. *Revista Brasileira de Finanças*, v. **1**, n. **1**, p. 19-43, 2003.

TABAK, B.M., SOLLACI, A.B., GOMES, G.M e CAJUEIRO, D.O. **Forecasting the yield curve for the Euro region**. *Economics Letters*, n. **117**, p. 513-516, 2012.

VASICEK, O. **An equilibrium characterization of the term structure**. *Journal of Financial Economics*, n. **5**, p. 177-188, 1977.

Apêndice A

Segue, abaixo a série completa das estimativas do modelos Nelson-Siegel e Diebold-Li.

Tabela A1	Nelson-Siegel				Diebold Li		
Data	beta_1	beta_2	beta_3	1/lambda	beta_1	beta_2	beta_3
30.01.2004	5.7211	-4.9357	-3.1201	1.8779	5.4658	-4.5884	-4.3036
27.02.2004	5.5682	-4.6576	-4.0873	1.7381	5.3434	-4.3456	-4.8951
31.03.2004	5.6187	-4.7068	-3.9537	2.0132	5.2204	-4.1781	-5.1253
30.04.2004	5.9673	-5.2370	0.0036	2.6657	5.7109	-4.9104	-3.0188
28.05.2004	5.9130	-5.0452	-0.0001	2.3576	5.7282	-4.8283	-2.3524
30.06.2004	5.8035	-4.6398	0.0015	2.4160	5.5970	-4.4169	-2.1331
30.07.2004	5.7461	-4.4445	-0.0008	2.6631	5.4750	-4.1538	-2.2875
31.08.2004	5.7310	-4.2616	-0.0026	3.9131	5.1719	-3.6138	-3.1827
30.09.2004	5.5004	-3.8924	-0.0006	3.4897	5.0319	-3.4032	-2.4065
29.10.2004	5.6236	-3.8012	0.0005	4.5440	4.9603	-3.0593	-2.9078
30.11.2004	5.5692	-3.4343	0.0015	3.4834	5.1753	-3.0088	-2.2111
31.12.2004	5.2117	-3.0750	0.0010	3.0132	4.8844	-2.7807	-1.4230
31.01.2005	4.7217	-2.3963	-0.0001	2.0709	4.6020	-2.3161	-0.5433
28.02.2005	4.8426	-2.2281	0.0002	1.8096	4.7877	-2.1921	-0.4140
31.03.2005	4.8517	-2.2102	0.0000	1.3162	4.8564	-2.2116	0.0619
29.04.2005	4.5856	-1.7782	0.0000	1.7064	4.5418	-1.7549	-0.2079
31.05.2005	4.3652	-1.4527	0.0000	1.8741	4.3036	-1.4182	-0.2030
30.06.2005	4.2201	-1.1196	0.0000	1.8593	4.1625	-1.0904	-0.0950
29.07.2005	4.3971	-1.1404	0.0001	0.7377	4.4447	-1.1184	0.3328
31.08.2005	4.4672	-0.8893	-0.0003	4.9834	4.1896	-0.6745	-0.1612
30.09.2005	4.3502	-1.4802	-0.0001	0.1830	4.3987	-1.0295	0.9162
31.10.2005	4.5955	-0.9193	0.0000	0.2926	4.6948	-0.7851	0.2820
30.11.2005	4.5447	-0.0029	-2.0733	0.0833	4.6489	-0.6201	0.1346
30.12.2005	4.4446	-0.4564	-0.5839	0.0833	4.4466	-0.3516	0.3711
31.01.2006	7.7261	-3.2187	-3.6268	19.9896	4.6191	-0.1363	-0.1382
28.02.2006	4.5931	-0.2660	0.8722	0.2885	4.5473	0.0293	0.4287
31.03.2006	5.9770	-1.2467	-0.5091	19.9834	4.9695	-0.2859	-0.0688
28.04.2006	6.2971	-1.5219	-0.1197	19.9834	5.2329	-0.4772	-0.4283
31.05.2006	5.1308	-0.4733	-0.3243	0.0833	5.2259	-0.3534	-0.0478
30.06.2006	5.1521	-1.1799	1.5467	0.1536	5.1158	-0.2826	0.7181
31.07.2006	5.7108	-0.5845	-1.5785	5.4834	5.0851	0.0712	-0.5280
31.08.2006	5.2741	-0.1146	-1.8136	3.4239	4.8719	0.3424	-0.9164
29.09.2006	4.6202	-0.4154	1.8119	0.1832	4.6809	0.1884	-0.1976
31.10.2006	5.0958	0.1268	-2.0232	3.0392	4.7266	0.5559	-1.0521
30.11.2006	4.9017	0.3283	-2.0855	2.8093	4.5736	0.7180	-1.1137
29.12.2006	4.7155	-0.3171	1.6903	0.1830	4.7556	0.2329	-0.1686
31.01.2007	5.8021	-0.6762	-2.1393	6.5834	4.9005	0.2525	-0.3672

28.02.2007	5.0129	0.2837	-2.1682	2.5353	4.7201	0.6414	-1.3836
30.03.2007	5.2452	-0.0879	-2.3099	2.7333	4.8699	0.3608	-1.5467
30.04.2007	5.4156	-0.4447	-2.2401	4.0834	4.7675	0.2571	-0.9558
31.05.2007	7.2632	-2.4017	-2.4834	19.9897	4.9797	-0.1592	-0.0271
29.06.2007	4.9888	-1.5927	1.1436	0.0833	5.0827	-0.4844	0.2517
31.07.2007	5.2348	-0.0813	-2.1674	2.0863	5.0337	0.1788	-1.8478
31.08.2007	5.7262	-1.6448	-1.2630	6.5834	4.8364	-0.7061	-1.2063
28.09.2007	5.3645	-1.6026	-0.0106	6.1834	4.8689	-1.1179	-0.9326
29.10.2007	5.1193	-1.0411	-2.2234	2.4328	4.7865	-0.6325	-2.1466
29.11.2007	4.9187	-1.6140	-2.9774	2.2648	4.5394	-1.1337	-3.0795
31.12.2007	5.2449	-2.0290	-2.7193	3.0084	4.5697	-1.2583	-2.7075
29.01.2008	5.1925	-2.9027	-3.7002	2.4818	4.5712	-2.1393	-4.1676
27.02.2008	5.3977	-3.2081	-5.1014	1.8849	5.0206	-2.7010	-5.5477
28.03.2008	5.3336	-3.9763	-3.7622	2.5923	4.6014	-3.0775	-4.8044
28.04.2008	5.0602	-3.8196	0.0026	3.0834	4.6633	-3.4416	-1.9493
30.05.2008	5.4418	-3.5905	-0.0001	4.0834	4.9475	-3.0072	-2.8045
30.06.2008	5.0890	-3.3002	-0.0002	3.3900	4.6992	-2.9056	-1.9279
30.07.2008	5.1933	-3.5289	0.0000	3.2282	4.8284	-3.1513	-2.0607
28.08.2008	5.1358	-3.4386	-0.0075	4.3177	4.5792	-2.8155	-2.5815
29.09.2008	4.8675	-4.1550	0.0123	3.2833	4.3938	-3.6870	-2.2966
31.10.2008	5.3492	-4.9853	3.3393	5.9834	5.1005	-4.6676	-3.8034
28.11.2008	4.6864	-4.6070	-0.0214	4.3018	3.9164	-3.7682	-3.3226
30.12.2008	3.7938	-3.7429	0.0092	5.0834	3.0628	-2.8963	-3.1394
30.01.2009	5.2791	-5.1568	0.0032	5.6834	4.0945	-3.8034	-4.3762
26.02.2009	4.9091	-4.7489	0.0330	4.2766	4.2120	-3.9242	-3.7937
27.03.2009	4.7540	-4.6963	0.0428	4.7834	3.9127	-3.7261	-3.8129
28.04.2009	5.1948	-5.1835	-1.0506	3.7834	4.3430	-4.1718	-4.3899
29.05.2009	5.1069	-4.9729	-4.5744	1.6414	4.9247	-4.7163	-5.2469
30.06.2009	4.9274	-4.7785	-4.1378	1.4681	4.8700	-4.6943	-4.4152
30.07.2009	5.0296	-4.9102	-4.5415	1.3395	5.0469	-4.9365	-4.4508
28.08.2009	4.7757	-4.6619	-4.4896	1.3656	4.7773	-4.6644	-4.4817
28.09.2009	4.6211	-4.5957	-4.0347	1.4433	4.5795	-4.5342	-4.2388
28.10.2009	4.8951	-4.8784	-4.3151	1.5193	4.8032	-4.7451	-4.7242
30.11.2009	4.8925	-4.8097	-4.9908	1.6931	4.6561	-4.4804	-5.6993
30.12.2009	5.2517	-5.2517	-4.6174	1.4424	5.2032	-5.1843	-4.8365
27.01.2010	5.1754	-5.1414	-5.0458	1.4751	5.1007	-5.0319	-5.3544
26.02.2010	5.2154	-5.0920	-5.4080	1.5322	5.0908	-4.9122	-5.8433
29.03.2010	5.3605	-5.2453	-5.1550	1.4303	5.3169	-5.1806	-5.3452
29.04.2010	5.1507	-4.9999	-5.0789	1.4129	5.1201	-4.9542	-5.2103
27.05.2010	4.8090	-4.6576	-4.6025	1.5846	4.6669	-4.4547	-5.1161
30.06.2010	4.5593	-4.3587	-4.8161	1.7602	4.2821	-3.9782	-5.5204
30.07.2010	4.7081	-4.5249	-5.0574	1.9460	4.2688	-3.9424	-5.9410
30.08.2010	4.1752	-4.0003	-4.3791	2.0431	3.7275	-3.4140	-5.2271
23.09.2010	4.4388	-4.2567	-4.7848	2.1879	3.8421	-3.4912	-5.7069
28.09.2010	4.4043	-4.2410	-4.7235	2.2979	3.7320	-3.3910	-5.6557

28.10.2010	4.9512	-4.7501	-5.7672	2.3158	4.1266	-3.7108	-6.7000
24.11.2010	5.1238	-4.9388	-5.3536	2.2364	4.4135	-4.0306	-6.4839
30.11.2010	4.9086	-4.6847	-5.5168	2.1428	4.2652	-3.8539	-6.4812
30.12.2010	5.1254	-5.0056	-5.3928	1.7125	4.8536	-4.6297	-6.1425
28.01.2011	5.2625	-5.0712	-6.1080	1.7501	4.9230	-4.6047	-6.8765
24.02.2011	5.1029	-4.9509	-5.5667	1.5554	4.9563	-4.7403	-6.0313
30.03.2011	5.1285	-5.0754	-4.8977	1.6748	4.9089	-4.7683	-5.6348
29.04.2011	5.0784	-5.0223	-5.3901	1.7375	4.7861	-4.6195	-6.1812
31.05.2011	4.9051	-4.8032	-5.5675	1.8615	4.4978	-4.2552	-6.4210
27.06.2011	5.1478	-5.0808	-5.6609	2.1839	4.4427	-4.1774	-6.7623
28.07.2011	5.0598	-4.9139	-5.8352	2.0392	4.4721	-4.1457	-6.7991
29.08.2011	4.3858	-4.3156	-5.2775	2.3738	3.5864	-3.3143	-6.1084
30.09.2011	3.5146	-3.4654	-3.8305	2.3104	2.9628	-2.7672	-4.6074
27.10.2011	4.1093	-4.0398	-4.7211	2.0452	3.6277	-3.4114	-5.5234
29.11.2011	3.5082	-3.4482	-3.9679	2.1974	3.0068	-2.8084	-4.6851
30.12.2011	3.4671	-3.4124	-3.8798	2.3750	2.8689	-2.6647	-4.5992
31.01.2012	3.6339	-3.5351	-4.2491	2.6018	2.8418	-2.5680	-4.8784
28.02.2012	3.7312	-3.5898	-4.1521	2.5702	2.9725	-2.6585	-4.8618
28.03.2012	3.9512	-3.8417	-4.2677	2.3439	3.3119	-3.0388	-5.1097
30.04.2012	3.8060	-3.6674	-4.2690	2.6329	2.9848	-2.6678	-4.9541
31.05.2012	3.2932	-3.2058	-3.2808	3.0940	2.4197	-2.1784	-3.9023
29.06.2012	3.4572	-3.3602	-3.2373	3.2130	2.5249	-2.2711	-3.9408
31.07.2012	3.2202	-3.0914	-3.5532	2.9861	2.3577	-2.0686	-4.0324
31.08.2012	3.3370	-3.2000	-3.7972	2.9289	2.4515	-2.1466	-4.2651
28.09.2012	3.5684	-3.4407	-3.9748	3.0369	2.5756	-2.2691	-4.4678
31.10.2012	3.5213	-3.3853	-3.7227	2.9263	2.6393	-2.3341	-4.3446
30.11.2012	3.4807	-3.3456	-3.8192	3.0433	2.5224	-2.2135	-4.3252
31.12.2012	3.6293	-3.5526	-3.8365	2.8805	2.7394	-2.4900	-4.5251